Cadre : $n, d \in \mathbb{N}^*$ $k \in \mathbb{N}$ $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$

I. Arcs paramétrés

[Gou] **Déf. ①** : On appelle arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ tout couple (I, γ) où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. Un arc paramétré continu est aussi appelé chemin

356 **Rq ②** : La définition reste vraie si on prend pour $\mathbb{R}^n$ un espace métrique ou topologique

Déf. ③ : Deux arcs paramétrés de $\mathbb{R}^n$ (I_1, γ_1) et (I_2, γ_2) de classe $\mathcal{C}^k$ sont dits équivalents s'il existe $\varphi : I_1 \to I_2$ un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Ils sont dits de même sens si φ est croissant.

Déf. ④ : Le support d'un arc paramétré (I, γ) est $\gamma^* = \gamma(I)$

Prop. ⑤ : Deux arcs paramétrés équivalents ont même support

Déf. ⑥ : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. γ est dit fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$

Ex. ⑦ : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto z_0 + re^{i\theta}$.

Alors $\gamma^* = \mathcal{C}(z_0, r)$ parcouru dans le sens direct

Déf. ⑧ : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $([a,b], \gamma)$ un chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$ tel que $\gamma^* \subset \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continue. L'intégrale de f le long de γ est $\int_\gamma f \, dz = \int_a^b f\circ\gamma(t) \cdot \gamma'(t) \, dt$

Ex. ⑨ : $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\theta \mapsto z_0 + re^{i\theta}$ et $f : \mathbb{C}\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$

Alors $\int_\gamma f(z) \, dz = 2i\pi$

Déf. ⑩ : Soit $([a,b], \gamma)$ un chemin $\mathcal{C}^1_{pm}$. Alors la longueur de γ est $Long(\gamma) = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt$

Ex. ⑪ : voir ex. ⑦ : $Long(\gamma) = \int_0^{2\pi} r \, d\theta = 2\pi r$

II. Connexité par arcs

1) Définitions, propriétés

Déf. ⑫ : Un espace topologique E est dit connexe par arcs si : $\forall x, y \in E$, $\exists \gamma : [0,1] \to E$ continue, $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$

Prop. ⑬ : "être reliés par un chemin" est une relation d'équivalence sur E.

Prop. ⑭ : Si un espace topologique E est connexe par arcs, alors il est connexe

Coro. ⑮ : Soit C une partie d'un ev E. Si C est convexe, alors C est connexe

Prop. ⑯ : $n \geq 2$. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe, alors il est connexe par arcs

2) Exemples et applications

[Za] **Lemme ⑰** : Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi_a : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto t + iat(1-t)$ est injective et continue. 49

Coro. ⑱ : 1) $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

2) si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{A} = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, alors $\mathcal{A}$ est connexe par arcs.

Appli. ⑲ : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective [GT]

Lemme ⑳ : Soit $B = B_f(0,1) \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ et $f : B \to B$ de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B$, alors il existe $\varphi : B \to S(0,1)$ telle que $\varphi_{|S} = id_{|S}$ 64

Appli. ㉑ : (Théorème de Brouwer) (voir ANNEXE)

Avec les notations précédentes, si $f : B \to B$ est continue, alors f admet (au moins) un point fixe

III. Analyse complexe

Cadre ㉒ : On considèrera uniquement des chemins $\mathcal{C}^1_{pm}$ définis sur un intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert.

1) Indice. Formule de Cauchy

[Tau] **Déf./Th. (23)** : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin fermé et $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. On définit
71 l'indice de z par rapport à γ par $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\xi - z} d\xi$.

Alors : $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C}\setminus\gamma^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ et nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

Ex (24) : Si $z_0 \in \mathbb{C}, r>0$ et $\gamma^* = \mathcal{C}(z_0, r)$. Alors $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z-z_0|<r \\ 0 & \text{si } |z-z_0|>r \end{cases}$

72 **Th. (25)** : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue. Si f admet une primitive sur Ω, alors pour tout chemin fermé γ tel que $\gamma^* \subset \Omega$, $\int_\gamma f\, dz = 0$

73 **Th. (26)** : On suppose Ω convexe. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout triangle $T \subset \overline{T} \subset \Omega$, $\int_{\partial T} f\, dz = 0$. Alors f admet une primitive sur Ω.

74 **Th. (27)** : *(Goursat)*
Soit $w \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{w\})$. Alors pour tout triangle $T \subset \overline{T} \subset \Omega$, on a $\int_{\partial T} f\, dz = 0$

DVP1 **Th. (28)** : *(Théorème de Cauchy dans un convexe)*
76 On suppose Ω convexe. Soit $w \in \Omega$, $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{w\})$. Alors pour tout chemin fermé γ tel que $\gamma^* \subset \Omega$, $\int_\gamma f\, dz = 0$

Th. (29) : *(formule de Cauchy dans un convexe)*
77 On suppose Ω convexe. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, γ un chemin fermé tel que $\gamma^* \subset \Omega$ et $z \in \Omega\setminus\gamma^*$. Alors $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \times f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$

Coro (30) : Ω ouvert. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors f est analytique sur Ω.

[Bu] **Appli (31)** : Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ *(intégrale de Dirichlet)*
860

2) Théorème des résidus

Th. (32) : *(théorème des résidus)* [Tau]
Soit $a_1 \dots a_k \in \Omega$ distincts, $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tel que f admette un 103
pôle en a_i $1 \le i \le k$. Soit γ chemin fermé tel que $\gamma^* \subset \Omega$ et $a_i \notin \gamma^*$ pour $1\le i\le k$. Alors,
$$\int_\gamma f\, dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Ind}_\gamma(a_j)\, \mathrm{Res}(f, a_j)$$

Appli (33) : *(transformée de Fourier d'une fraction rationnelle)*
Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $z_1 \dots z_n$ ses pôles et on suppose $\mathrm{Im}\, z_k \neq 0$ pour $1\le k\le n$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f. Alors : ♡
$$\hat{f}(t) = \begin{cases} 2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}(f(z)e^{-itz}, z_k) & \text{si } t>0 \\ -2i\pi \sum_{\mathrm{Im}\, z_k < 0} \mathrm{Res}(f(z)e^{-itz}, z_k) & \text{si } t<0 \end{cases}$$

Ex (34) : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$. Calculer $\hat{f}$.

IV. Calcul différentiel

Cadre (35) : $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert [Rou]

1) Gradient

Déf./Prop. (36) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable sur U. Alors : 50
$\forall x \in U, \exists ! \nabla_x f \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall h \in \mathbb{R}^n, df(x)(h) = \langle \nabla_x f, h\rangle$.
$\nabla_x f$ est appelé gradient de f en x.

Prop. (37) : Avec les hypothèses précédentes, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, 61-63
$C_\lambda = \{x \in U \,/\, f(x) = \lambda\}$ (courbe de niveau) et $a \in C_\lambda$. Soit $\gamma : I \to U$
de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $0 \in I$ et $\gamma(0) = a$. On suppose $\nabla_a f \neq 0$. 87
Alors, $f\circ\gamma'(0) = \langle \nabla_a f, \gamma'(0)\rangle$.
1) si γ^* est tangent à C_λ en a, $\langle \nabla_a f, \gamma'(0)\rangle = 0$
2) $\nabla_a f$ donne la direction et le sens de plus grande pente de f en a.

[Ber] **Appli. 38** : *(méthode du gradient)*

159 Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle \langle b, x\rangle$.

Soit $\bar{x}$ l'unique solution de $A\bar{x} = b$.

On notera $\langle x, y\rangle_A = \langle Ax, x\rangle$ et $\|x\|_A^2 = \langle Ax, x\rangle$. Alors

1) Φ admet un unique minimum en $\bar{x}$.

2) $\lambda \in \mathbb{R}$. $C_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - \bar{x}\|_A^2 = \lambda + \|\bar{x}\|_A^2\}$ est une sphère pour la norme $\|\ \|_A$

3) si $a \in C_\lambda$, la direction de plus grande décroissance de Φ est $-\nabla_a \Phi = Aa - b$

2) Théorème des extrema liés.

[Rou] **Déf. 39** : Une partie Π de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de dimension d en si pour tout $a \in \Pi$, il existe U voisinage ouvert

197 de a dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme tels que : $\varphi(\Pi \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\}]$ *(carte locale)*

Th. 40 : Soit Π une partie de $\mathbb{R}^n$. Sont équivalentes

1) Π est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ de dimension d

200 2) pour tout $a \in \Pi$, il existe U voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $dg(a)$ soit surjective et :

$$\Pi \cap U = \{x \in U \,/\, g(x) = 0\} \quad \textit{(fonction implicite)}$$

Rq. 41 : En notant $g = (g_1 \dots g_{n-d})$, $dg(a)$ est surjective SSI $dg_1(a) \dots dg_{n-d}(a)$ sont linéairement indépendantes.

Déf. 42 : Soit Π une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et de dimension d, et $a \in \Pi$. L'espace tangent à Π en a est :

198 $T_a\Pi = \{v \in \mathbb{R}^n \,/\, \exists\, I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $0 \in I$, $\gamma : I \to \Pi$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v\}$

Le plan tangent à Π en a est $a + T_a\Pi$

Th. 43 : Soit $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ et de dimension d, 199

soit $a \in \Pi$. Alors $T_a\Pi$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, et : 201

1) carte locale : $T_a\Pi = d\varphi(a)^{-1}(\mathbb{R}^d \times \{0_{\mathbb{R}^{n-d}}\})$

2) fonction implicite : $T_a\Pi = \operatorname{Ker} dg(a)$

Th. 44 : *(extrema liés)*

Soient $f, g_1 \dots g_p : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $X = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_p(x) = 0\}$ 372

On suppose que $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$, et que $dg_1(a) \dots dg_p(a)$ sont linéairement indépendantes. Alors, il existe $\lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que

$$df(a) = \lambda_1\, dg_1(a) + \dots + \lambda_p\, dg_p(a).$$

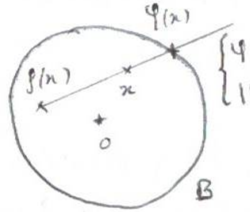
Appli. 45 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$, $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto {}^t x A x$ 408

et $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, Q(x) = 1\}$ *(quadrique)*.

M.q. si f atteint un extremum sur X en a, alors a est un vecteur propre de A.

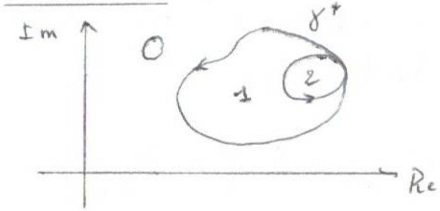
ANNEXE

Lemme (20) :



$$\begin{cases} \varphi(x) = f(x) + \lambda(x)\,(x - f(x)) \\ \|\varphi(x)\|_2 = 1 \end{cases}$$

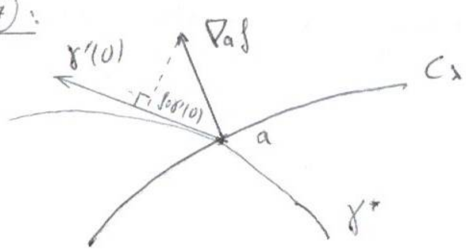
Déf / Th (23) :



0, 1, 2 : Ind$_\gamma$

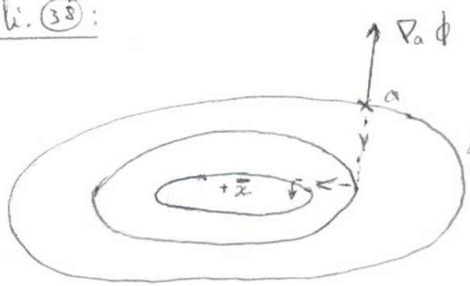
[Rou] 87

Prop. (37) :



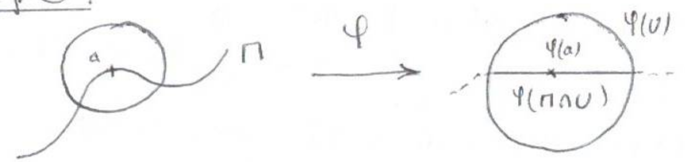
[Bou]

Appli. (38) :

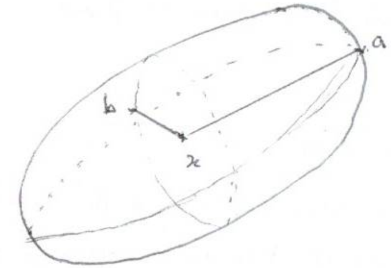


$$\{\|x - \bar{x}\|_A^2 = \|a - \bar{x}\|_A^2\}$$

Déf. (40) :



Appli. (45) : $Sp(A) = \{0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n\}$



$f(x) = \|x\|^2$ maximum en a, $Aa = \lambda_1 a$

. minimum en b, $Ab = \lambda_n b$

Références :

- [Gou] Gourdon, *Analyse* (3e éd.)
- [Za] Zavidovique, *Un max de maths*
- [GT] Gonnord Tosel, *Calcul différentiel*
- [Tau] Tauvel, *Analyse complexe L3*
- [Bou] Bernis, *Analyse : 40 développements*
- [Rou] Rouvière, *PGdCD* (4e éd.)